Exercice 2 **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(4 ; -4 ; 4), \quad B(5 ; -3 ; 2), \quad C(6 ; -2; ; 3), \quad D(5; 1; 1)$$

1. On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -3-(-4) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ -3-(-2) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 1 \times (-1) + 1 \times (-1) - 2 \times (-1) = -1 - 1 + 2 = 0$.

Puisque leur produit scalaire est nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en B.

2. D'après la question précédente, les points A, B et C étant non alignés, ils définissent bien un plan. Leurs coordonnées vérifient donc toute équation cartésienne du plan ainsi défini.

Or on a : $4-(-4)-8 = 4+4-8 = 0$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation $x-y-8 = 0$.

De même $5-(-3)-8 = 5+3-8 = 0$ et $6-(-2)-8 = 6+2-8 = 0$, donc les coordonnées de B et C vérifient également l'équation $x - y - 8 = 0$.

Donc $x - y - 8 = 0$ est bien une équation cartésienne du plan (ABC).

3. **a.** On sait que si $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à un plan, alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Or on a vu à la question précédente que $x - y - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC), donc $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Puisque d est orthogonale au plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. De plus, la droite d passe par le point D (5 ; 1 ; 1).
Donc une représentation paramétrique de d est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 1 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.}$$

b. Puisque la droite d est orthogonale au plan (ABC) et passe par D, le projeté orthogonal H de D sur (ABC) est le point d'intersection de la droite D et du plan (ABC). Les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du point H vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de d et l'équation cartésienne de (ABC). Elles sont donc solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 1 \\ x-y-8 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow 5 + t - (1-t) - 8 = 0 \iff 2t - 4 = 0 \iff 2t = 4 \iff t = 2$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+2 = 7 \\ y & = & 1-2 = -1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur (ABC) sont donc :

$$\boxed{\text{H}\,(7\ ;\ -1\ ;\ 1)}$$

c. $\text{DH} = \sqrt{(7-5)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

4. **a.** La pyramide ABCD admet pour base le triangle ABC et pour hauteur le segment [DH].
On a donc $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire}\,(\text{ABC}) \times \text{DH}$.
Puisque ABC est rectangle en B, on a :

$$\begin{array}{rcl} \text{aire}\,(\text{ABC}) & = & \dfrac{\text{AB} \times \text{CB}}{2} = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\text{CB}}\|}{2} \\ & = & \dfrac{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}{2} \\ & = & \dfrac{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{1+1+1}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{18}}{2} \\ & = & \dfrac{3\sqrt{2}}{2}. \end{array}$$

On a donc :

$$V=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\sqrt{2}=\boxed{2}$$

Le volume de la pyramide ABCD est 2.

b. La distance du point A au plan (BCD) est la longueur de la hauteur issue de A de la pyramide ABCD. Soit x cette distance. On a alors $V=\dfrac{1}{3}\times\text{aire (BCD)}\times x$. Donc :

$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{42}}{2}\times x=2\iff x\sqrt{42}=2\times3\times2\iff x=\frac{12}{\sqrt{42}}=\frac{2\times6}{\sqrt{6}\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\boxed{\frac{2\sqrt{42}}{7}}$$

La distance du point A au plan (BCD) est $\dfrac{2\sqrt{42}}{7}$.